جامعة البعث | العام الدراسي | الاسم:
كلية العلوم | ٢٠١٦–٢٠١٧ | الرقم: ١٩

امتحان مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمال للسنة الأولى رياضيات – د. إضافية

السؤال الأول (55د):

لدينا المتحول العشوائي الذي قانونه الاحتمالي:

$$f(x,y)=\alpha\left(\frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\right)\ ;(x,y)\in[0,\infty]\times[0,1]$$

١) أوجد الثابتة (α) حتى تكون هذه الدالة، دالة كثافة!

٢) ادرس استقلال المتحولين بطريقتين!

٣) أوجد توقع وتشتت كل من المتحولين المفروضين!

٤) احسب توقع الجداء، تغاير المتحولين ثم معامل الارتباط!

٥) أوجد مايلي (مع ذكر القانون):

$$E(\pi X+26),\ E(\pi Y-\ln 16),\ Var\left(\sqrt{\pi}X+2\right),\ Var\left(\sqrt{\pi}Y+2017\right)$$
$$\operatorname{cov}\left(3X+5,\sqrt{2}Y+13\right),\ \rho\left(3X+5,\sqrt{2}Y+13\right)$$

السؤال الثاني (45د):

ليكن (X) متحول عشوائي قانونه الاحتمالي:

$$P(X=x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x};x=0,1,\dots,n$$

١) ما اسم هذا التوزيع وتحقق من كونه تابع احتمال!

٢) احسب توقع وتشتت هذا المتحول!

٣) أوجد الدالة المولدة لهذا المتحول ثم تحقق من قيمة التوقع والتشتت السابقين!

٤) عرف المتوسط الهندسي والتوافقي والمنوال مع مثال توضيحي لكل تعريف!

٥) متى يكون نوع مقدر الوسيط منحفاً ومتى يكون متسقاً.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في ٢٠١٧/٨/٢٧ | د. مصطفى حسن

امتحان مقرر مبادئ الإحصاء والاحتمال للسنة أولى رياضيات – إضافية ٢٠١٦–٢٠١٧

السؤال الأول (٥٥د): ١) الطلب الأول -٥-:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\left(\frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\right)dx\,dy \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,(\arctan y)_0^\infty\,du = \alpha\frac{\pi\sqrt{\pi}}{8} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{8}{\pi\sqrt{\pi}}$$

٢) دراسة الاستقلال -١٠-: بما أن $f(x,y)=\left(\frac{8e^{-x^2}}{\pi\sqrt{\pi}}\right)\left(\frac{1}{1+y^2}\right)=h_1(x)h_2(y)$ فهما مستقلان

وبطريقة أخرى: توجد الكثافتين الهامشيتين:

$$f(x)=\int_0^\infty f(x,y)dy=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2},\ f(y)=\int_0^\infty f(x,y)dx=\frac{8}{\pi(1+y^2)}=2y$$

ونلاحظ أن: $f(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-x^2}\frac{1}{\pi}\left(\frac{8}{1+y^2}\right)=f(y)f(x)$

٣) توقع وتشتت المتحولين -١٦-:

$$EX=\int_0^\infty x f(x)dx=\int_0^\infty\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)x e^{-x^2}dx=\frac{1}{\pi},\ EX^2=\int_0^\infty x^2 f(x)=\int_0^\infty\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)x^2 e^{-x^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

$$EY=\int y f(y)dy=\int_0^\infty\frac{8y}{\pi(1+y^2)}dy=\frac{\ln 16}{\pi},\ EY^2=\int y^2 f(y)dy=\int_0^\infty\frac{8y^2}{\pi(1+y^2)}dy=\frac{2(2+\pi)}{\pi},$$

$$VarX=\frac{\pi\sqrt{\pi}-2}{\pi^2},\quad VarY=\frac{2(2+\pi)}{\pi}-\left(\frac{\ln 16}{\pi}\right)^2$$

٤) توقع الجداء والتغاير ومعامل الارتباط -١٢-:

$$E(XY)=\frac{8}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{x y e^{-x^2}}{1+y^2}\right)dx\,dy=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{\ln 16}{\sqrt{\pi}}\Rightarrow cov(X,Y)=E(XY)-EX.EY=0$$

$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}}=\frac{0}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}}=0$$

٥) الطلب الخامس -١٢-:

$$E(\pi X+26)=\pi EX+26=27,\ E(\pi Y-\ln 16)=\pi EY-\ln 16=0,$$

$$Var(\sqrt{\pi}X+2)=\pi VarX=\pi\sqrt{\pi}-2,\ Var(\sqrt{\pi}Y+2017)=\pi VarY=2(2+\pi)-\frac{\ln 16}{\pi},$$

$$cov(3X+5,\sqrt{2}Y+13)=3\sqrt{2}\,cov(X,Y)=0,\ \rho(3X+5,\sqrt{2}Y+13)=\rho(X,Y)=0.$$

السؤال الثاني [٤٥]: ١) -٦- ندعو هذا التوزيع بالتوزيع الحداني

$$\sum_{x=0}^{n}P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}=(p+1-p)^n=1$$

٢) -١٠-

$$EX=\sum_{x=0}^{n} x.P(X=x)=\sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x}\underset{n-1=m}{\overset{x-1=y}{=}}n.p(p+1-p)^{m}=n.p$$

$$EX^{2}=\sum_{x=0}^{n} x^{2}P(X=x)=\sum_{x=1}^{n} x\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x}\underset{n-1=m}{\overset{x-1=y}{=}}$$

$$=n.p(n.p-p+1)^{m}=(n.p)^{2}-np^{2}+n.p\Rightarrow VarX=n.p(1-p)$$

٣)أوجد الدالة المولدة لهذا المتحول ثم تحقق من قيمة التوقع والتشتت السابقين -٧-:

$$U_{X}(t)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{x!(n-x)!}(pe^{t})^{x}(1-p)^{n-x}=(pe^{t}+1-p)^{n}$$

$$EX=\frac{\partial U_{X}(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=n.p,\ EX^{2}=\frac{\partial^{2}U_{X}(t)}{\partial t^{2}}\Big|_{t=0}=(n.p)^{2}-np^{2}+n.p$$

$$VarX=n.p(1-p)$$

٤)(١٢=٤+٤+٤) المنوال لمجموعة من القيم هي القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها ، أو القيمة الأكثر شيوعاً ، وقد لا يكون للقيم منوال وقد يوجد أكثر من منوال واحد .

المجموعة ٢,٥,٧,٩,٩,٩,١٠,١٠,١١,١٢,١٨ لها منوال واحد وهو ٩ .

يُعرف المتوسط (الوسط) الهندسي (والذي نرمز له بالرمز $\overline{X}_g$) لمجموعة من القياسات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ بأنه الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم أي :

$$\overline{X}_g=\sqrt[n]{X_1.X_2 \ldots X_n}$$

المتوسط الهندسي للأعداد ٢,٤,٨ هو : $\overline{X}_g=\sqrt[3]{X_1.X_2.X_3}=4.$

المتوسط التوافقي إذا كانت لدينا مجموعة من القياسات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، فإن المتوسط التوافقي (والذي نرمز له بالرمز $\overline{X}_h$) لهذه القياسات يُعطى بالعلاقة التالية :

$$\overline{X}_h=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$$

المتوسط التوافقي للأعداد ٣,٤,٦ هو :

$$\overline{X}_h=\frac{1}{\frac{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\ldots+\frac{1}{X_n}}{n}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}=\frac{3}{\frac{9}{12}}=4.$$

٥) (٥+٥) إذا كان توقع المتغير مساوياً للوسيط فهو متناظر.

وإذا كان منحنياً وتشتته يسعى نحو الصفر فهو متسق.

انتهت الأجوبة